

Ex.8 解: 二次型 $f = x^T A x$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) 由题意,

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow a + 2 - 2 = 1 \Rightarrow a = 1.$$

$$|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow -4 - 2b^2 = -12 \Rightarrow b = \pm 2 \text{ (舍去负值)}.$$

(2) 略.

Ex.9 解: 二次型 $f = x^T A x$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由题意, 矩阵 A 的特征值为 $0, 1, 4$, 于是,

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow 1 + a + 1 = 0 + 1 + 4 \Rightarrow a = 3.$$

又矩阵 A 有一个特征值为 0 , 所以, $|A| = 0$, 即

$$a + b + b - a - 1 - b^2 = 0 \Rightarrow (b - 1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1.$$